

Chapitre 15

Fiche 1

Trigonométrie

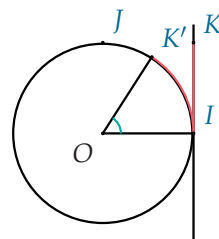
Enroulement du cercle et radian

I. Enroulement de la droite numérique

Définition 30

Le cercle trigonométrique C est le cercle de centre O et de rayon 1. Il est muni d'un sens de parcours appelé **sens direct**, qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Avec ce choix, on dit que le **plan est orienté**.

Les points I et J sont situés sur le cercle trigonométrique. Soit K le point de coordonnées $(1 ; 1)$ dans le repère $(O ; I, J)$. La droite (IK) a pour équation $x = 1$. C'est une droite numérique pour laquelle on considère le repère $(I ; K)$ dont l'origine est I et tel que $IK = 1$.



On enroule la demi-droite $[IK)$ autour du cercle C dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, à tout nombre réel x positif correspond un unique point-image M sur le cercle C .

Sur la figure, on voit K' le point-image de K sur le cercle trigonométrique.

En enroulant la demi-droite correspondant aux nombres réels négatifs dans le sens des aiguilles d'une montre, on fait également correspondre à tout nombre réel x négatif un point M sur le cercle C .

Dans chacun de ces deux cas, on dit que x a pour point-image M sur le cercle C . Si x' est un nombre obtenu à partir de x en ajoutant ou en enlevant un nombre de tours $(k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z})$, alors x et x' ont le même point-image sur C . Ainsi, un point du cercle est l'image d'une infinité de réels (positifs et négatifs).

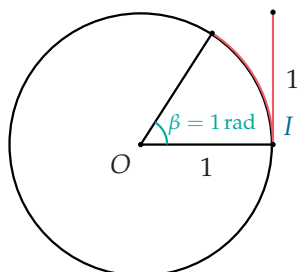
Propriété 50

Tout nombre réel x a un point-image unique sur le cercle C . S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + k \times 2\pi$, alors x et x' ont le même point-image sur le cercle C .

II. Le radian

Définition 31

La mesure en **radian** d'un angle est égale à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il



intercepte.

Exemple

Un angle plat (180°) mesure exactement π radians, soit environ 3,14 radians.

notation Le radian est noté **rad**. Cette notation est omise en général, contrairement à celle du degré.

notation

Propriété 51

Les mesures des angles en degré et en radian sont proportionnelles.

Méthode[Convertir entre degrés et radians]

Calculer les nombres x , y et z dans le tableau suivant de conversion entre degrés et radians.

Mesure en degré	0	30	y	150	180
Mesure en radian	0	x	$\frac{\pi}{2}$	z	π

$$\frac{180}{30} = 6 \text{ donc } x = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$\frac{\pi}{2}$ rad est la moitié de π rad, donc y est la moitié

de 180 degrés, c'est-à-dire $y = 90^\circ$ et $z = \frac{150 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$.

III. Exercices

Exercice 484. Préciser la mesure de l'angle géométrique correspondant en degré.

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x (degré)						

Exercice 485. Donner une mesure en radian des angles géométriques suivants.

x (degré)	30	45	75	90	135	150
x (rad)						

Exercice 486 - Vrai ou Faux. Ces nombres ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

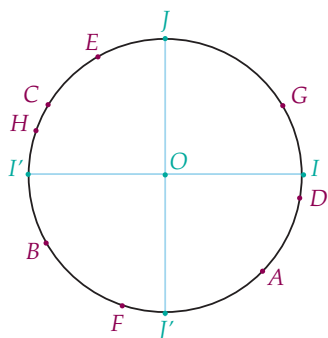
1. $\frac{\pi}{5}$ et $-\frac{4\pi}{5}$

2. $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{21\pi}{5}$

3. $-\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{7\pi}{5}$

4. $-\frac{3\pi}{5}$ et $-\frac{18\pi}{5}$

Exercice 487. Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



- À l'aide d'un rapporteur, associer à chaque point (de A à F) le nombre réel de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ dont il est le point-image :

$$\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{6\pi}{10} \text{ et } \frac{9\pi}{10}.$$

- Donner les nombres réels dont les points-images sont les points précédents (de A à F), cette fois, dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Exercice 488. Donner plusieurs nombres réels qui ont même point-image que :

- $\frac{2\pi}{3}$
- $-\frac{\pi}{5}$
- $-\frac{27\pi}{4}$
- $\frac{3\pi}{10}$

Exercice 489 - Conversion. 1. Convertir en degré les mesures des angles suivants données en radian :

$$\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{2\pi}{3}.$$

- Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

Exercice 490 - Conversion. 1. Convertir en degré les mesures des angles suivants données en radian :

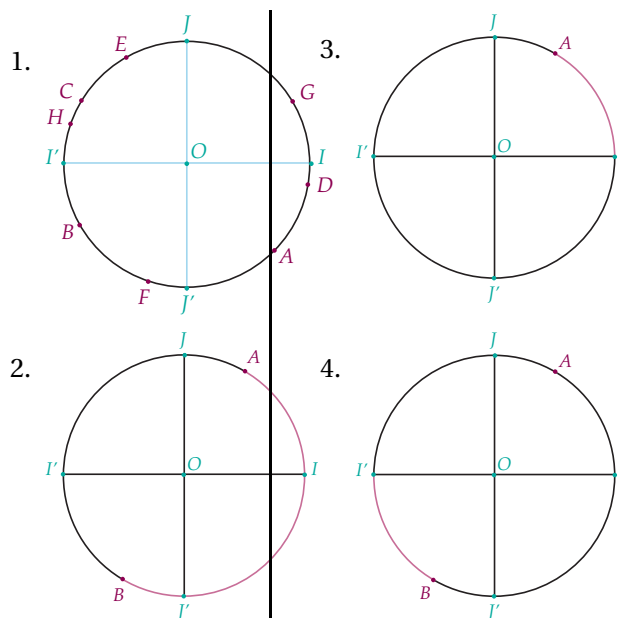
$$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{7\pi}{8} \text{ et } \frac{\pi}{4}.$$

- Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels précédents.

Exercice 491. Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels suivants :

$$-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{17\pi}{6}.$$

Exercice 492. Soit A le point-image de $\frac{\pi}{3}$ et B le point-image de $-\frac{2\pi}{3}$. Déterminer l'ensemble des nombres réels compris dans $]-\pi; \pi]$ dont les points-images forment l'arc rouge (extrémités comprises).



Exercice 493 - Intervalles. Représenter en rouge sur le cercle trigonométrique, orienté dans le sens direct, l'arc de cercle correspondant aux points-images des nombres réels compris dans :

- $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$
- $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$
- $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Fiche 2

Trigonométrie

Repérage à l'aide et du sinus

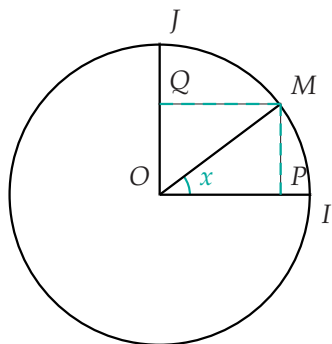
I. Repérage à l'aide du cosinus et du sinus

Théorème 9

Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.

Soit x un nombre réel et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique C .

Le point M a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

Démonstration :


Soit M le point-image d'un réel x tel que $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On note respectivement P et Q les projetés orthogonaux de M sur (OI) et (OJ) .

Dans le triangle OPM rectangle en P :

$\cos x = \frac{OP}{OM}$. Or $OM = 1$ donc $OP = \cos x$.

Par conséquent, le point M a pour abscisse $\cos x$.

On montre de même que $\sin x = \frac{PM}{OM}$.

Or $PM = OQ$ et $OM = 1$, on en déduit que $OQ = \sin x$ et, par conséquent, M a pour ordonnée $\sin x$.

Si $x \notin \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on peut démontrer le théorème en utilisant des symétries. $\square$

Exemples

— Le nombre réel 0 a pour point-image $I(1 ; 0)$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

— Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour point-image $J(0 ; 1)$ donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Propriété 52

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k :

1. $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$
2. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

Démonstration : Soit M le point-image du nombre réel x .

1. Ses coordonnées sont $(\cos x; \sin x)$ et $M \in C$ donc $OM = 1$, ce qui se traduit par $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = 1$ c'est-à-dire $\sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} = 1$, d'où la conclusion.
2. L'égalité **1**) entraîne immédiatement $(\cos x)^2 \leq 1$ et $(\sin x)^2 \leq 1$ car les deux expressions $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$ sont positives ou nulles. Or quel que soit un réel, $x^2 \leq 1$ est équivalent à $-1 \leq x \leq 1$, d'où le résultat.
3. Soit M' le point-image du nombre réel $x + k \times 2\pi$. Les points M et M' sont confondus. Ils ont donc même abscisse et même ordonnée. $\square$

méthode : Calculer $\sin x$ quand on connaît $\cos x$

1. On utilise l'égalité $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ pour calculer $(\sin x)^2$.
2. On détermine le signe de $\sin x$ en utilisant l'intervalle auquel appartient x :
 - si l'une des mesures de x appartient à $]0; \pi[$, alors $\sin x > 0$;
 - sinon $\sin x < 0$.
3. On conclut sur la valeur exacte de $\sin x$.

Calculer $\sin \frac{\pi}{3}$ sachant que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

correction

$(\cos \frac{\pi}{3})^2 + (\sin \frac{\pi}{3})^2 = 1$ est équivalent à $(\sin \frac{\pi}{3})^2 = 1 - (\cos \frac{\pi}{3})^2$
soit $(\sin \frac{\pi}{3})^2 = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or $\frac{\pi}{3} \in]0; \pi[$ donc $\sin \frac{\pi}{3} > 0$. En conclusion, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque

On calcule la valeur exacte de $\sin x$ quand on connaît $\cos x$ de la même façon. Si l'une des mesures de $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos x \geq 0$ sinon $\cos x < 0$.

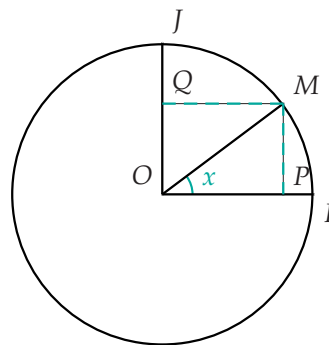
Notations On note souvent $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ au lieu de $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$.

valeurs particulières

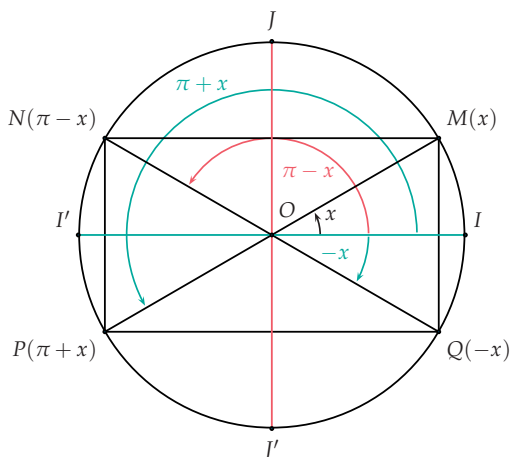
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque

On note la symétrie du tableau. Elle est liée à la symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$ qui passe par le point-image de $\frac{\pi}{4}$. Pour mémoriser ce tableau, il suffit donc de se rappeler des trois valeurs suivantes : $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

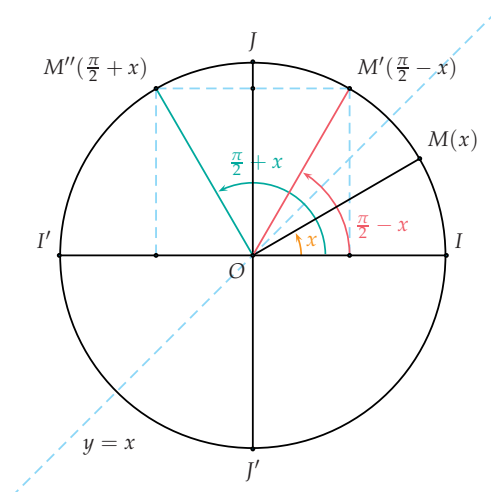
**II. Angles associés****Propriété 53**

Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$


Pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$



Remarque

Les points I' et J' sont symétriques respectivement de I et de J par rapport au point O . Ce sont les

$$\text{points-images de } \pi \text{ et } -\frac{\pi}{2} : \begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \sin \pi = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}.$$

Méthode Calculer une mesure des angles associés

On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. En déduire $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos \frac{4\pi}{3}$.

Correction

En appliquant directement la formule $\cos(-x) = \cos x$, il vient $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

De même, on peut remarquer également que $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ et donc :

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ car } \cos(\pi + x) = -\cos x.$$

III. exercices

Exercice 494. Compléter le tableau.

x en radian	$\frac{\pi}{3}$	...	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$	...
$\cos x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	-1	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

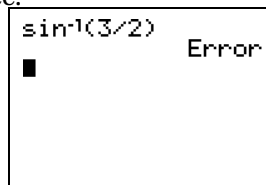
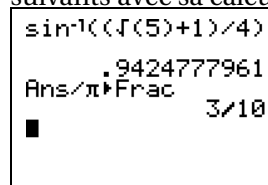
Exercice 495. Donner les coordonnées des points A , B et C points-images des nombres réels $\frac{\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 496. Donner les coordonnées des points A , B et C points-images des nombres réels $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 497. Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \frac{1}{4}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Calculer $\sin x$.

Exercice 498. Soit x un nombre réel tel que $\sin x = \frac{1}{5}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Calculer $\cos x$.

Exercice 499. Un élève a obtenu les deux écrans suivants avec sa calculatrice.



- Quelle équation a-t-il résolue dans l'écran de gauche? Quelle solution de cette équation est donnée par la calculatrice?
 - L'équation précédente a-t-elle d'autres solutions dans $]-\pi; \pi]$?
- Pourquoi a-t-il obtenu une erreur dans l'écran de droite?

Exercice 500. Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

- $\sin x = -0,8$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$
- $\sin x = 1,2$ et $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 501. Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

- $\cos x = 2,1$ et $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 502. Soit x un réel, simplifier les expressions suivantes :

- $\cos(x + \pi) - \cos(-x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x)$
- $\sin(2\pi - x) + \sin(\pi + x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(4\pi + x)$
- $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

Exercice 503. Donner la symétrie qui transforme le point-image du nombre réel x en le point-image du nombre réel y .

1. $x = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{7\pi}{6}$
2. $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = -\frac{\pi}{4}$
3. $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = -\frac{\pi}{3}$
4. $x = -\frac{3\pi}{8}$ et $y = -\frac{5\pi}{8}$

Exercice 504. 1. Calculer $\sin \frac{5\pi}{4}$, $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et

$$\sin \frac{5\pi}{6}.$$

2. On sait que $\cos \left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

En déduire $\sin \left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 505. En utilisant les angles associés, calculer la valeur exacte des coordonnées du point-image M des nombres réels suivants :

- | | | |
|---------------------|--|----------------------|
| 1. $\frac{3\pi}{4}$ | | 3. $\frac{13\pi}{4}$ |
| 2. $-\frac{\pi}{6}$ | | 4. $-\frac{2\pi}{3}$ |

Exercice 506. On sait que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
En déduire :

- | | | |
|----------------------------|--|--|
| 1. $\cos \frac{11\pi}{12}$ | | 3. $\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right)$ |
| 2. $\sin \frac{5\pi}{12}$ | | 4. $\cos \frac{13\pi}{12}$ |

Fiche 3

Trigonométrie

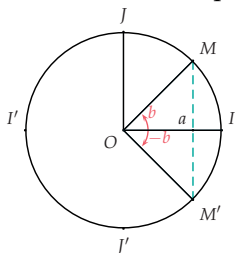
Equations trigonométriques

I. Équations et inéquations trigonométriques

Équations $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 507. Résoudre $\cos x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$. Cela revient à chercher les points-images sur le cercle dont l'abscisse est égale à a .

1. Pour résoudre l'équation $\cos x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi ; \pi]$.



2. Dans le cas général, $a \in]-1 ; 1[$.

Il existe un unique nombre b dans $]0 ; \pi[$ tel que $a = \cos b$. Les solutions de $\cos x = \cos b$ sont par conséquent b et $-b$.

Une valeur approchée de b peut être obtenue à l'aide de la calculatrice après avoir sélectionné le mode radians.

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k \times 2\pi$ et $-b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Correction

On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. L'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. Dans $\mathbb{R}$, cette équation a une infinité de solutions. Les deux solutions précédentes sont encore valables plus toutes celles que l'on obtient en ajoutant ou en soustrayant un nombre entier de fois 2π . Les solutions sont $\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 508. Résoudre $\sin x = a$ avec $x \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation $\sin x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on résout d'abord cette équation dans $]-\pi ; \pi]$.

1. Dans le cas général $a \in]-1 ; 1[$, il existe un unique nombre b dans $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ tel que $a = \sin b$. L'équation est donc équivalente à $\sin x = \sin b$, ce qui est équivalent à $x = b$ ou $x = \pi - b$.
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est obtenu en soustrayant ou en ajoutant un nombre entier de fois 2π : $b + k \times 2\pi$ et $\pi - b + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Résoudre l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

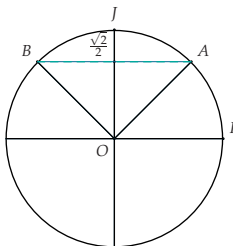
correction

On remarque que l'équation est équivalente à $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

Les solutions de cette équation dans $]-\pi ; \pi]$ sont $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ dont les points-images sur le cercle sont A et B.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc :

$$\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ et } \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Inéquation du type $\cos x \geq a$ ou $\sin x \geq a$ avec $a \in I$, I intervalle donné**

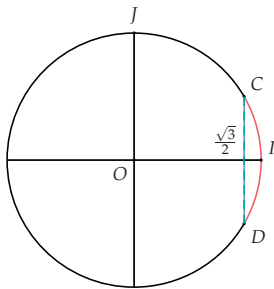
Exercice 509. Résoudre une inéquation trigonométrique Résoudre l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi ; \pi]$.

Correction

L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est équivalente à

$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ dont les solutions dans $]-\pi ; \pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$. Les nombres dont le point-image sur le cercle a une abscisse supérieure strictement à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont compris strictement entre $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ dans le sens trigonométrique.

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle : $S = \left] -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} \right[$.

**Remarques**

- Des cas particuliers peuvent se présenter, il faut faire attention à traduire $\cos x \geq a$ (resp. $\sin x \geq a$) par : on cherche les nombres réels dont le point-image sur le cercle a une abscisse (resp. ordonnée) supérieure ou égale à a .
- L'intervalle de résolution I n'est pas toujours $]-\pi ; \pi]$. L'intervalle $[0 ; 2\pi[$ est un autre intervalle possible pour décrire le cercle trigonométrique. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0 ; 2\pi[$ est $S = \left[0 ; \frac{\pi}{6} \right[\cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi \right[$.

II. Exercices

Equation

Exercice 510. On considère l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Résoudre cette équation dans $]-\pi; \pi]$ et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants.
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 511. L'écran suivant obtenu avec la calculatrice correspond à la résolution d'une équation.

```
sin⁻¹(1/2)
.5235987756
Ans/π→Frac
1/6
```

1. (a) De quelle équation s'agit-il ?
(b) Quelle est la solution obtenue ?
2. Résoudre cette équation dans $]-\pi; \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

Exercice 512. 1. Résoudre l'équation $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ dans $\mathbb{R}$.

2. Préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0; 4\pi]$

Exercice 513. Montrer que l'équation $\cos 2x = \frac{1}{2}$ a quatre solutions dans $]-\pi; \pi]$ puis placer sur le cercle trigonométrique les quatre points correspondants.

Inéquation

Exercice 514. On considère l'inéquation $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.
3. Vérifier le résultat obtenu en définissant comme fonction le booléen $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ qui vaut 1 en x si $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ et 0 sinon.

```
Plot1 Plot2 Plot3
V1=cos(X)≥1/2
V2=
V3=
V4=
V5=
V6=
V7=
```

```
WINDOW
Xmin=3.141592...
Xmax=3.1415926...
Xscl=.52359877...
Ymin=0
Ymax=1.5
Yscl=1
Xres=1
```

où 3.141592... correspond à π et .52359877... correspond à $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 515. On considère l'inéquation $\cos x > 0$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.

Exercice 516. On considère l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.

Exercice 517. On considère l'inéquation $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi; \pi]$.

II.1. Calculs avec cos et sin

Exercice 518. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. (a) $\sin(3\pi+x)$ | | (c) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ |
| (b) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$ | | (d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ |
| 2. (a) $\sin(\pi-x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ | + | (b) $3\sin(\pi+x) - 2\sin(\pi-x) + 4\sin(x-\pi)$ |

Exercice 519. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|--|---------------------------------------|
| 1. $\cos(x-\pi)$ | | 3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ |
| 2. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ | | 4. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ |

Fiche 4

Trigonométrie

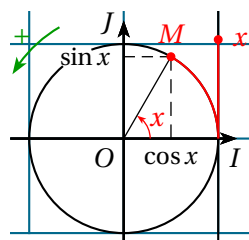
Fonctions cosinus et sinus

I. Fonctions cosinus et sinus

I.1. Définition et rappels

Soit $(O ; I, J)$ un repère orthonormé direct. Le point M , image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O , a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$ où $\cos x$ est le cosinus de x et $\sin x$ est le sinus de x .

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0


Définition 32

Fonctions cosinus et sinus

- La fonction cosinus, notée $\cos$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$.
- La fonction sinus, notée $\sin$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$.

II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

Définition 33

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T .

f est **périodique** de période T ou est T -périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Définition 34

Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0.

- Une fonction f est **paire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 54

- Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques.
- La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Démonstration : Pour tout réel x , on a en effet :

2

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

□

Remarque

- Dans un repère, les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π .
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

III. Dérivabilité et variations**Propriété 55**

Dérivées des fonctions **cos** et **sin**

Les fonctions cos et sin sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.

- $\cos' = -\sin$
- $\sin' = \cos$

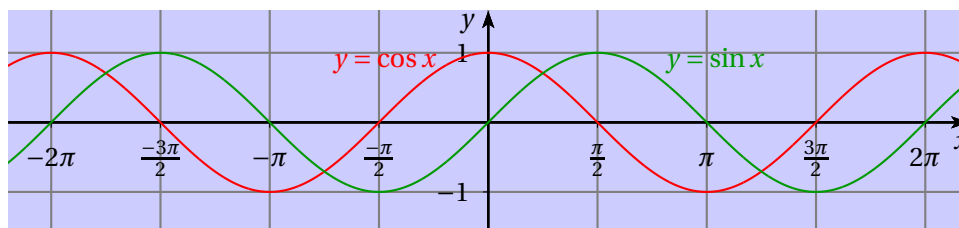
Propriété 56

- Les variations des fonctions cos et sin sur $[0 ; \pi]$ sont données par les tableaux ci-contre.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	0	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	1	0

- Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des **sinusoïdes**.



Démonstration : — $\cos' = -\sin$. Or, $0 < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0$ c'est-à-dire $-\sin x < 0$.

De plus, la fonction $\sin$ ne s'annule qu'en 0 et π .

Donc, $\cos$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

— $\sin' = \cos$. Or, $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$.

De plus, la fonction $\cos$ ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$.

Donc, $\sin$ est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. $\square$

Exercice 520. Dériver une fonction formée de cos ou sin

En général, ce type de fonction définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on établira d'abord les ensembles de définition et de dérivabilité. Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
2. $f(x) = \cos^2 x$
3. $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$

correction

1. f est de la forme $u(ax + b)$ avec $u(x) = \sin x$, $a = 3$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

On a $u'(x) = \cos x$ d'où $f'(x) = au'(ax + b) = 3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. f est de la forme u^2 avec $u(x) = \cos(x)$.

On a $u'(x) = -\sin x$ d'où $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2(-\sin x)\cos x = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$.

3. f est de la forme uv dont la dérivée est $(u'v + uv')$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 1 + \cos(x)$.

$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$.

Or, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$. D'où $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

Posons $X = \cos x$. Alors, $f'(x) = 2X^2 + X - 1 = (2X - 1)(X + 1)$ après calcul des racines.

Ainsi, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

Exercice 521. Étudier une fonction trigonométrique. Il arrive fréquemment qu'une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d'abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l'étudier sur un ensemble plus grand.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0; \pi]$. En déduire les variations de f sur $[0; \pi]$.
2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.
3. Montrer que f est 2π -périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0; \pi]$ puis sur $[-4\pi; 4\pi]$.

Correction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $2 + \cos x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{3 \cos x(2 + \cos x) - 3 \sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6 \cos x + 3}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{(2 + \cos x)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $\cos x + \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$. Or :

— sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, $\cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{2} > 0$;

— sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$, $\cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{2} < 0$.

Et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $\frac{2\pi}{3}$.

D'où le tableau de variation ci-contre.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	-
f	0	$\sqrt{3}$	0

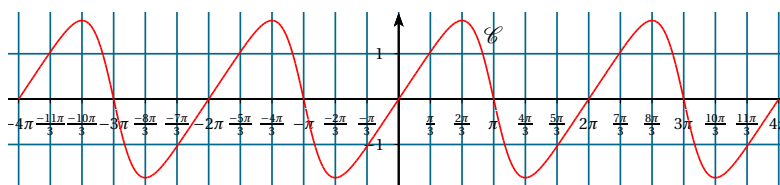
2. $f(-x) = \frac{3\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-3\sin x}{2 + \cos x} = -\frac{3\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.

On peut donc limiter l'étude de f à $[0; \pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi; -\frac{2\pi}{3}]$ et sur $[\frac{2\pi}{3}; \pi]$ et croissante sur $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$.

3. $f(x + 2\pi) = \frac{3\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{3\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$ donc f est 2π -périodique.

4. On trace $\mathcal{C}$ sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; 0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.

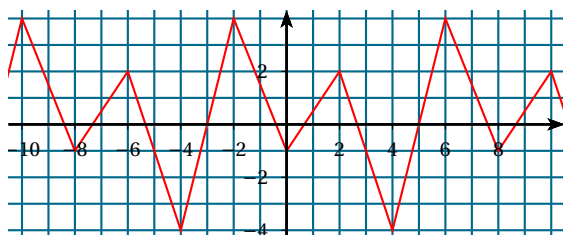
Enfin, comme f est 2π -périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.



IV. Exercices

Périodicité

Exercice 522. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T représentée dans le repère suivant.



- (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ telles que $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\vec{u}$.
(b) Déterminer la valeur de T .
- Donner l'image par f des entiers : 14, -16, 56 et 58.

Exercice 523. Vérifier que la fonction f est T -périodique.

1. $f : x \mapsto \sin(6x - 3)$ $T = \frac{\pi}{3}$

2. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ $T = \pi$

3. $f : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x$ $T = \pi$

4. $f : x \mapsto (4\cos^2 x - 3)\cos x$ $T = \frac{2\pi}{3}$

Parité

On rappelle que, sur un ensemble $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à 0, une fonction est :

- paire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$;
- impaire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Exercice 524. Étudier la parité des fonctions suivantes.

— $f_1 : x \mapsto x^2 + 4$

— $f_2 : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$

— $f_3 : x \mapsto \frac{1 + x^2 + x^4}{x(x^2 + x^4)}$

— $f_4 : x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 2}$

— $f_5 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$

- $f_6 : x \mapsto |x|$
- $f_7 : x \mapsto \cos x + \sin x$
- $f_8 : x \mapsto \cos(x + \pi)$

Exercice 525. On considère les types de fonctions suivantes :

1. affine $x \mapsto ax + b$
2. polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$
3. homographique $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$
4. polynôme du troisième degré $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pour chaque type, à quelle condition a-t-on :

- une fonction paire ?
- une fonction impaire ?

(In)équations avec cos et sin

Exercice 526. Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$
2. $\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$
3. $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4}$
4. $\cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$
5. $2 \cos 2x = 1$
6. $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\cos 2x = \cos x$
8. $\sin 3x = \cos x$

Exercice 527. 1. Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

- (a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (b) $\sin x = -\frac{1}{2}$
- (c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (d) $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- (a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (b) $\cos x = -\sin x$

Exercice 528. 1. Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

- (a) $\cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} \right]$
- (b) $\sin x$ sur $\left[\frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3} \right]$

2. À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$:

- (a) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (b) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$
- (c) $\cos x < 0$

Exercice 529. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$
2. $\sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin x$
4. $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos x$

Exercice 530. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ les inéquations suivantes :

1. $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 \geq 0$
2. $2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 < 0$
3. $\cos^2 x - \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq 0$

Exercice 531. Résoudre sur $] -\pi ; \pi]$ les inéquations :

1. $\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) < \frac{1}{2}$
2. $\sin \left(3x - \frac{\pi}{7} \right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Étude de fonctions

Exercice 532 - Vrai ou faux ?. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos x$ et représentée par $\mathcal{C}_f$ dans un repère d'origine O . Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse.

1. f est 2π -périodique.
2. $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à O .
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x f'(x) = x^2 \sin x$.
4. La tangente $\mathcal{C}_f$ en O a pour équation $y = x$.

Exercice 533. Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 2x + \sin 2x.$$

1. Étudier la parité de f . Interpréter graphiquement.
2. (a) Démontrer que, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x) = 2(1 + \cos 2x).$$

(b) Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. À l'aide de la parité, dresser le tableau de variation de f .

Exercice 534. Étudier sur $[-\pi; \pi]$ les variations de la fonction :

$$f: \theta \mapsto \sin(2\theta + \pi/6) - \theta.$$

Exercice 535. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est périodique.
3. Montrer que f n'est ni paire ni impaire.
4. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 536. Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}.$$

1. (a) Dériver deux fois f et en déduire que $f(x) \geq 0$ pour tout réel x .
(b) Dériver quatre fois g et en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout réel x .
(c) En déduire un encadrement de $\cos x$.
2. (a) Déterminer la précision $\varepsilon(x)$ de l'encadrement.
(b) Étudier la fonction ε .
En déduire à quelle condition sur x il est pertinent d'utiliser cet encadrement.
3. Application : encadrer $\cos \frac{\pi}{5}$ et estimer sa précision.

Exercice 537. Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = \cos x(1 + \sin x)$$

et représentée par $\mathcal{C}$ dans un repère.

1. Vérifier que f est 2π -périodique et que f n'est ni paire ni impaire.
2. Justifier que f est dérivable et montrer que :

$$f'(x) = (1 + \sin x)(1 - 2 \sin x).$$

3. (a) Résoudre sur $[0; \pi]$ l'inéquation $2 \sin x \leq 1$.
(b) En déduire le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Vérifier que pour tout réel x :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?

6. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
7. Tracer $\mathcal{T}$ puis $\mathcal{C}$.

Exercice 538. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \cos^2 x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

1. Étudier la parité de la fonction f .
2. Étudier la périodicité de la fonction f .
3. Démontrer que f est :
— strictement décroissante sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$;
— strictement croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.
4. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $0, \frac{2\pi}{3}, \pi$ et $\frac{4\pi}{3}$.
5. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f(x)$								

6. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 539. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

1. Démontrer que $f'(x) = -\sin x(1 + 2 \cos x)$.

2. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.

3. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 2\pi]$.

(b) En déduire les variations de f sur $[0 ; 2\pi]$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur $[0 ; 2\pi]$.