

Chapitre 5

Fiche 1

Suites arithmétiques

Définition et terme général

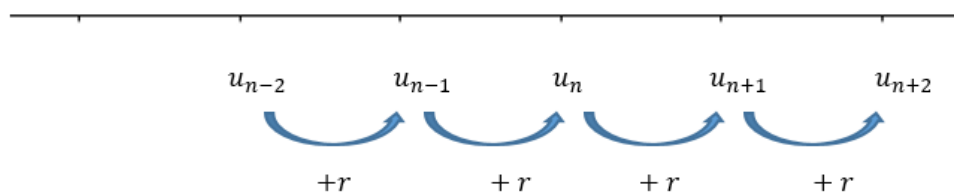
I. Définition

Définition 11

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

La constante r s'appelle la **raison** de la suite.



Ainsi, dire qu'une suite est arithmétique signifie que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours une même constante.

Exemples

- La suite des multiples de 5 (0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; ...) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 0
- Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$. Cette suite est-elle arithmétique ?
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n + 1) = 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$.
Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

- Soit (v_n) la suite définie par
$$\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n - 5}{2} \end{cases} ; n \geq 0$$

Cette suite est-elle arithmétique ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n - 5}{2} - v_n = v_n - \frac{5}{2} - v_n = -\frac{5}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + \left(-\frac{5}{2}\right)$.

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme $v_0 = 7$.

On peut aussi voir directement que :

$$v_{n+1} = \frac{2v_n - 5}{2} = v_n - \frac{5}{2}.$$

Méthode

- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est une constante.
- Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique, on exhibe deux différences de termes consécutifs qui ne sont pas égales (un contre exemple).

Exemple

Soit (w_n) la suite de terme général $w_n = n^2$. Cette suite est-elle arithmétique ?

On a :

$$w_1 - w_0 = 1$$

$$w_2 - w_1 = 4 - 1 = 3$$

Ainsi $w_{n+1} - w_n$ n'est pas constant,
donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

II. Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . On a :

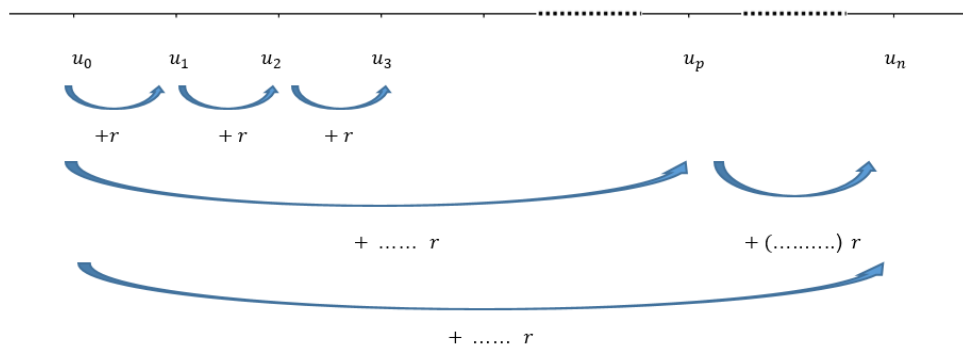
$$u_1 = u_0 + r ;$$

$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r ;$$

$$u_3 = u_2 + r = u_0 + 2r + r = u_0 + 3r ;$$

...

et ainsi de suite.



Propriété 10

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . On a :
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n - p)r$.
2. Réciproquement, si (u_n) est une suite telle que, il existe a et b réels tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = an + b,$$

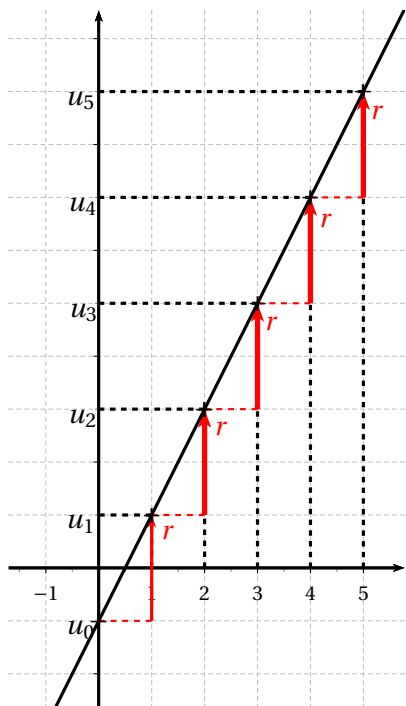
alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et $b = u_0$.

Démonstration : Admise

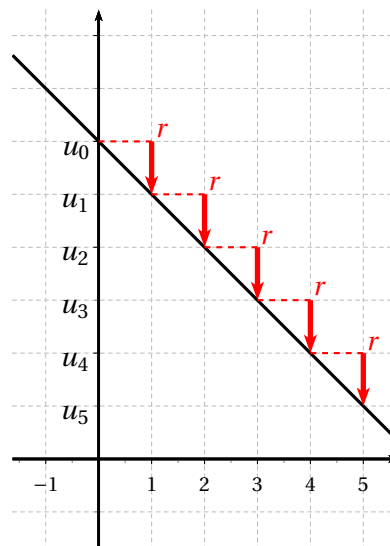
□

Graphiquement, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ appartiennent à la droite d'équation $y = u_0 + rx$. Son coefficient directeur est r .

Si $r > 0$, la fonction affine $x \mapsto u_0 + rx$ est croissante : les termes sont de plus en plus grands.



Si $r < 0$, la fonction affine $x \mapsto u_0 + rx$ est décroissante : les termes sont de plus en plus petits.



Exemples

- On considère les exemples précédents :

- la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an + b$, avec $a = 2$ et $b = 1$, la suite (u_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

- on a montré que la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n - 5}{2} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

est une suite arithmétique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme $v_0 = 7$.

D'après la propriété précédente, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{5}{2}n + 7$.

Ainsi, on peut calculer un terme connaissant son indice :

$$v_{100} = -\frac{5}{2} \times 100 + 7 = -250 + 7 = -243.$$

- On définit la suite arithmétique (w_n) telle que $w_3 = 17$ et de raison -2 . Calculons w_{35} .

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_3 + (n - 3) \times r$; on a donc :

$$\begin{aligned} w_{35} &= w_3 + (35 - 3) \times (-2) \\ &= 17 + 32 \times (-2) \\ &= 17 - 64 \\ &= -47 \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 151.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 :

- en utilisant la définition d'une suite arithmétique,
- en utilisant la formule du terme général.

Exercice 152.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2. Calculer u_{50} .

Exercice 153.

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = -6$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + 5$. Justifier que (u_n) est arithmétique puis calculer u_{20} .

Exercice 154.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique. Déterminer son premier terme et sa raison sachant que :

- $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.
- $u_{12} = 8$ et $u_4 = -12$.

Exercice 155.

Exprimer u_n en fonction de n sachant que la suite (u_n) est arithmétique de raison r .

- $u_0 = 2$ et $r = -2$
- $u_1 = -1$ et $r = 4$
- $u_5 = 3$ et $r = 2$
- $u_0 = 0$ et $r = 1$

Exercice 156.

Les suites (u_n) définies ci-dessous sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner leur raison.

- $u_n = n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.
- $u_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
- $u_n = 5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.
- $u_n = \frac{n+2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 157.

Les suites (u_n) définies ci-dessous sont-elles arithmétiques ? Si oui, donner leur raison.

- $u_n = -5n + 7$, $n \in \mathbb{N}$.
- $u_1 = 4$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + 4$.
- $u_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + n - 1$.

Exercice 158.

La suite (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -2$.

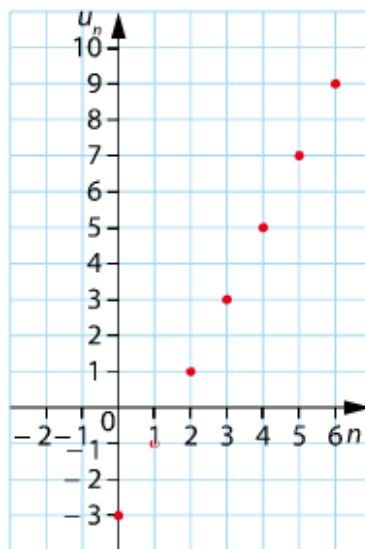
- Représenter graphiquement dans le plan les dix premiers termes de cette suite.

- Sur quelle courbe sont situés ces points ?

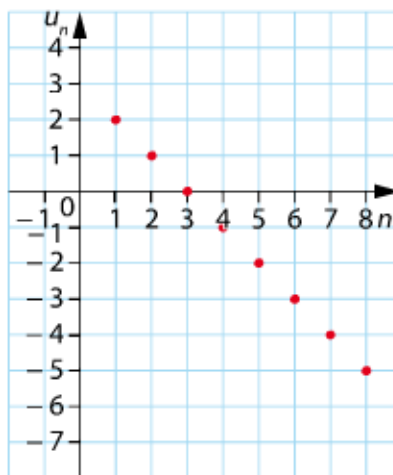
Exercice 159.

Les graphiques ci-dessous représentent des suites arithmétiques. Pour chacune, donner son premier terme, sa raison l'expression de u_n en fonction de n et l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .

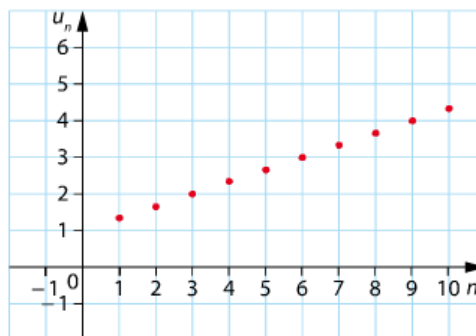
1.



2.



3.



Fiche 2

Suites arithmétiques

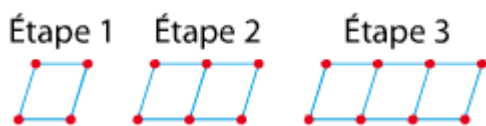
Situations modélisées par une suite arithmétique- suite auxiliaire arithmétique

I. Situations modélisées par une suite arithmétique

Exercice 160. Un coureur de fond est habitué à courir sur une distance de 10000 m. Pour s'entraîner pour un marathon, il décide d'augmenter chaque semaine sa distance d'entraînement de 1500 m. On note d_n la distance parcourue à l'entraînement la n -ième semaine. On pose $d_0 = 10000$.

1. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n . Que peut-on en déduire pour la suite (d_n) ?
2. En déduire d_n en fonction de n .
3. Au bout de combien de semaines aura-t-il atteint ou dépassé les 42,195 km d'un marathon ?

Exercice 161. On effectue les constructions suivantes :



Soit b_n le nombre de billes et t_n le nombre de tiges utilisées à l'étape n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

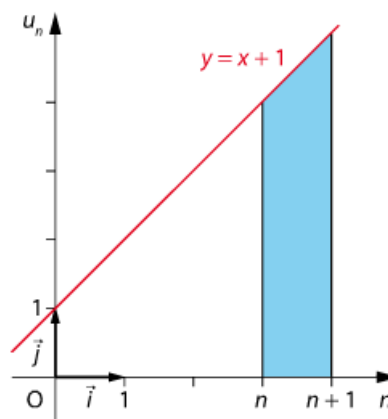
1. Déterminer la nature des suites (b_n) et (t_n) .
2. Exprimer b_n et t_n en fonction de n .
3. Si, à une étape, on utilise 625 tiges, combien de billes utilise-t-on à cette étape ?

Exercice 162. Un petit village en Chine surveille avec inquiétude l'avancée d'une dune de sable

de plusieurs kilomètres de long. « Elle n'est plus aujourd'hui qu'à 200 m des premières maisons du village et avance à une vitesse moyenne de 8 mètres par an », explique un responsable du village en 2010. Pour $n \geq 0$, on note d_n la distance (en mètre) séparant le village de la dune l'année $(2010 + n)$. On suppose que la dune continue d'avancer à la même allure.

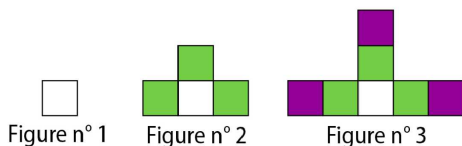
1. Justifier que la suite (d_n) est arithmétique.
2. Dans combien d'années le village sera-t-il atteint ?

Exercice 163. Pour tout entier naturel n , u_n est l'aire du trapèze coloré en bleu sur la figure ci-dessous.



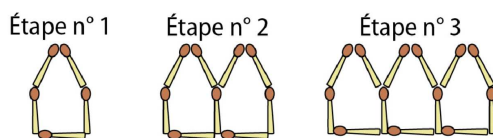
Exprimer u_n en fonction de n et vérifier que la suite (u_n) est arithmétique.

Exercice 164. On construit une succession de figures comme sur le schéma ci-dessous :



On suppose le procédé de construction est le même pour les figures suivantes. Combien de carrés constituent la figure n°100 ?

Exercice 165. On schématise avec des allumettes des maisons dont les murs sont mitoyens, comme ci-dessous :



Combien d'allumettes sont utilisées à l'étape n° 2020 ?

II. Suite auxiliaire arithmétique

Exercice 166. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

On admet que pour tout n entier naturel, $u_n > 1$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
3. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
 - (a) Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{6}$.
 - (b) Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - (c) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = \frac{1 + v_n}{v_n}$.
 - (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Déterminer une expression de u_{100} .

Exercice 167. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2}.$$

On admet que pour tout n entier naturel, $u_n > 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
3. Pour tout n entier naturel, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.
 - (a) Démontrer que (v_n) est arithmétique de raison à déterminer et de premier terme à déterminer.
 - (b) Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - (c) Exprimer u_n en fonction de v_n .
 - (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Déterminer une expression de u_{100} .

Fiche 3

Suites arithmétiques

Somme des termes consécutifs

I. Somme des n premiers entiers non nuls

Propriété 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Posons $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. On a :

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n$$

$$S_n = n + n - 1 + \cdots + 2 + 1$$

En additionnant les deux lignes , on obtient

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Cette somme comporte n termes égaux à $n+1$. On a donc :

$$2S_n = n \times (n+1)$$

D'où

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple

Ainsi, la somme des entiers de 1 à 100 vaut :

$$S_{100} = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

II. Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété 12

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Et plus généralement, la somme de plusieurs termes consécutifs se calcule avec la formule suivante :

$$\text{Somme des termes} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_n &= u_0 + u_0 + r + \cdots + u_0 + n \times r \\ &= \underbrace{u_0 + u_0 + \cdots + u_0}_{n+1 \text{ termes}} + r + 2r + \cdots + nr \\ &= u_0(n+1) + r(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= u_0(n+1) + r \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1) \left(u_0 + r \frac{n}{2} \right) \\ &= (n+1) \frac{2u_0 + nr}{2} \\ &= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} \end{aligned}$$

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -10$ et de raison $r = 4$. Calculer la somme des 21 premiers termes de la suite.

Le premier terme de la suite est u_0 donc le 21^e terme est u_{20} .

D'après la propriété, on a :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} &= (20+1) \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} \\ &= 21 \times \frac{u_0 + u_0 + 20 \times r}{2} \\ &= 21 \times \frac{-10 - 10 + 20 \times 4}{2} \\ &= 21 \times \frac{60}{2} \\ &= 21 \times 30 \\ &= 630 \end{aligned}$$

Remarque

On parle de suite arithmétique car le nombre u_n est la **moyenne arithmétique** du terme d'indice $n-1$ et du terme d'indice $n+1$ de la suite :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

III. Exercices

Exercice 168. Sachant que $u_0 = 1$ et $r = 4$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

Exercice 169. Sachant que $u_0 = 2$ et $r = -3$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

Exercice 170. Sachant que $u_0 = 10$ et $r = -2$, calculer $u_3 + u_2 + \dots + u_{100}$.

Exercice 171. Le nombre $S = 12 + 17 + \dots + 67$ est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer S .

Exercice 172. Le nombre $S = 100 + 102 + \dots + 1000$ est la somme des nombres pairs de 100 à 1000. Calculer S .

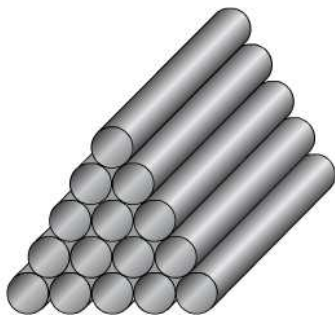
Exercice 173. Combien de termes contient chacune des listes suivantes formées d'entiers consécutifs ?

- a 1, 2, 3, ..., 25
- b 0, 1, 2, ..., 15
- c 5, 6, 7, ..., 251
- d 2, 4, 6, ..., 20

Exercice 174. Calculer les sommes.

- a $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 39$
- b $B = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 24$
- c $C = 100 + 101 + 102 + \dots + 140$

Exercice 175. On empile des tuyaux cylindriques :

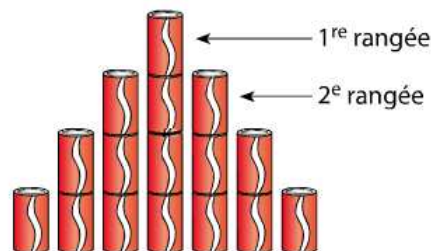


1. Combien de tuyaux pourra-t-on empiler de cette manière si la première rangée est formée :

- (a) de 10 tuyaux ?
- (b) de n tuyaux ($n \geq 2$) ?

2. On veut empiler 136 tuyaux. Combien de tuyaux doit comporter la première rangée ?

Exercice 176. On empile des canettes de la façon suivante :



1. On note r_n le nombre de canettes sur la n -ième rangée ($n \geq 1$). Quelle est la nature de la suite (r_n) ?
2. Écrire r_n en fonction de n .
3. Calculer le nombre de canettes nécessaires pour réaliser un empilement analogue de 25 rangées.

Exercice 177. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Soit $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$ pour $n \geq 1$.
 - (a) Exprimer S_n puis T_n en fonction de n .
 - (b) Montrer que la suite (T_n) est arithmétique.